برآورد ارزش در معرض ریسک (VaR) سرمایه‌گذاری در سهام

سارا جمهوری
دانشیار گروه آمار دانشگاه بیرجند
تیرماه ۱۴۰۲

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

طرح پژوهشی

برآورد ارزش در معرض ریسک (VaR) سرمایه‌گذاری در سهام توسط شرکت‌های بیمه

بیمه مرکزی
جمهوری اسلامی ایران

سارا جمهوری

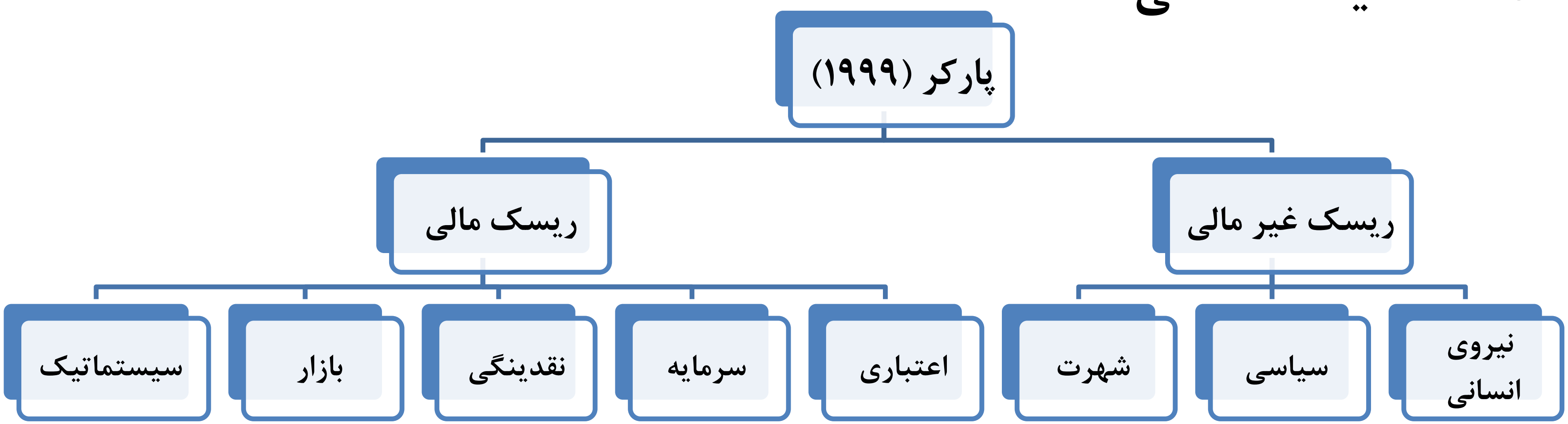
دانشیار گروه آمار دانشگاه بیرجند

دکتر محبوبه اکبری لاکه

دانش‌آموخته دکتری آمار از دانشگاه بیرجند

ریسک

- زیان بالقوه سرمایه‌گذاری
- نوسان ناشی از پیشامدهای غیرمنتظره
  - هر گونه نوسان احتمالی بازده اقتصادی در آینده (تهدیدها و فرصت‌ها)
  - نوسانات بازده اقتصادی منفی در آینده (تهدیدها)
- ماهیت تصادفی



مدیریت ریسک

- فرآیندی پویا
- به حداقل رساندن صدمات ناشی از فعالیت‌ها
- تعیین حدود زیان

استراتژی
- تجزیه ریسک
- تجمیع ریسک

انواع داده‌ها

- داده‌های سود-زیان (P&L)

$$P_t = V_t - V_{t-1}$$

- داده‌های زیان-سود (L&P)

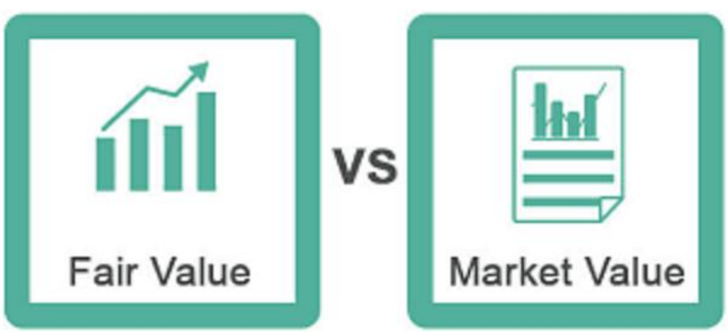
$$L_t = -P_t = V_{t-1} - V_t$$

- بازده حسابی

$$R_t = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$$

- بازده هندسی

$$r_t = ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)$$



افق ریسک

- دوره اندازه‌گیری زیان بالفعل پرتفوی (h)

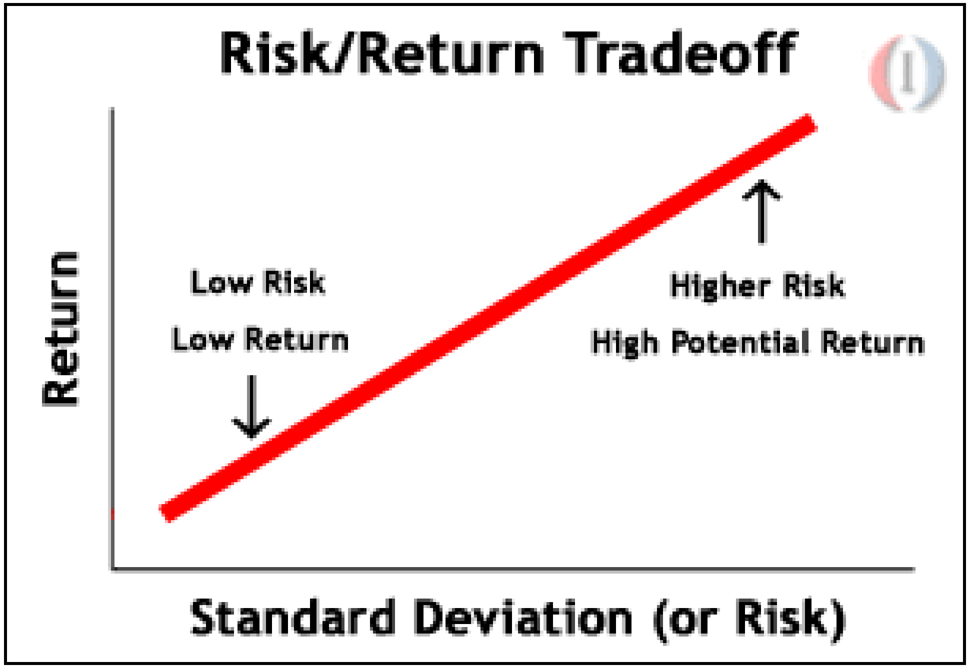
$$L_{[s,s+\mathrm{h}]} := -(V_{s+\mathrm{h}} - V_s)$$

$$L_{t+1} := L_{[t\mathrm{h},(\mathrm{t}+1)\mathrm{h}]} = -(V_{t+1} - V_t)$$

$$\mathrm{h} \approx \frac{1}{250}$$

اندازه‌گیری ریسک

- تعیین سرمایه ریسک و کفایت سرمایه
- ابزار مدیریتی
- تعیین حق بیمه



ارزش در معرض ریسک (VaR)

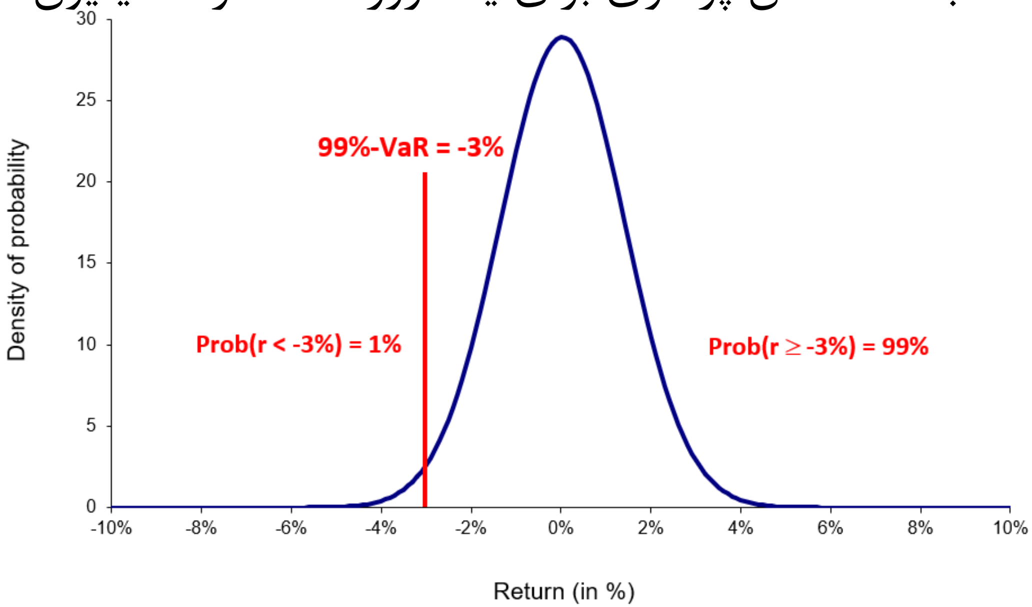
❖ چقدر از دارایی موجود در پرتفوی خود را در پایان روز فردا از دست خواهیم داد؟

$$VaR_{\alpha}(L) = inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\}$$

مثال: اگر

۳ میلیون $= VaR_{0.01}$ روزانه

در این‌صورت ۹۹ درصد اطمینان داریم که با نگه‌داشتن پرتفوی برای یک روز، حداکثر ۳ میلیون زیان متحمل می‌شویم.



VaR در بازده‌های با توزیع نرمال

مثال: $VaR_{10\%}$ در یک افق ۱ ساله ۲ میلیون دلاری سرمایه گذاری شده در صندوقی که بازده سالانه آن به طور معمول با میانگین ۵٪ و نوسان ۱۲٪ در نظر گرفته می شود، چقدر است؟

حل: $R_t \sim N(0.05, 0.12^2)$

$$P\left(Z < \frac{x-0.05}{0.12}\right) = 0.1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-0.05}{0.12} = -1.2816$$

$$x = -1.2816 \times 0.12 + 0.05 = -0.1038$$

- $VaR_{10\%}$ یک ساله برابر 10.38% ارزش پورتفوی است.
- اگر ارزش پورتفوی ۲ میلیون دلار باشد، آنگاه

$$\boldsymbol{VaR = 0.1038 \times 2m\$ = 207.572\$}$$

$$\boldsymbol{VaR_\alpha = -(\Phi^{-1}(\alpha)\sigma + \mu) = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu}$$

محاسبه VaR بر اساس داده‌ها

- محاسبه بر اساس ارزش پورتفوی

$$VaR_\alpha = V_0 - F_p^{-1}(\alpha) = V_0 - V^C$$

- محاسبه بر اساس بازده حسابی

$$VaR_\alpha = V_0 \times \%VaR$$

که در آن

$$\%VaR = F_r^{-1}(\alpha) = -\frac{V^C - V_0}{V_0}$$

- محاسبه بر اساس بازده لگاریتمی

$$VaR_\alpha = V_0(1 - \exp(R^C))$$

که در آن $R^C = log\left(\frac{V^C}{V_0}\right)$ و $\%VaR = F_R^{-1}(\alpha) = -R^C(\alpha)$

مقیاس‌بندی VaR بر اساس داده‌ها

بازده‌های روزانه متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک هستند.

$$VaR_{1,\alpha} = \sigma_1 \Phi^{-1}(1-\alpha) - \mu_1$$

$$R_t = \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t} \approx ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) = r_t$$

$$\mu_h = h\mu_1, \qquad \sigma_h = \sqrt{h}\sigma_1$$

$$VaR_{h,\alpha} = \sqrt{h}\sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha) - h\mu_1$$

VaR در بازده‌های با توزیع t استیودنت

$$f_\nu(t) = (\nu\pi)^{-1/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(1+\nu^{-1}t^2\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

$$V(T) = \nu(\nu-2)^{-1}$$

$$-t_\nu^{-1}(\alpha) = t_\nu^{-1}(1-\alpha)$$

$$\text{Student } t \text{ VaR}_{\alpha,\nu} = \sqrt{\nu^{-1}(\nu-2)}\; t_\nu^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu$$

$$\text{Student } t \text{ VaR}_{h,\alpha,\nu} = \sqrt{\nu^{-1}(\nu-2)h}\; t_\nu^{-1}(1-\alpha)\sigma - h\mu$$

معایب VaR

- فاقد خاصیت زیرجمع‌پذیری

$$VaR_{\alpha}(L_1 + L_2) \leq VaR_{\alpha}(L_1) + VaR_{\alpha}(L_2)$$

- ماکزیمم زیان را مشخص نمی‌کند، بلکه با احتمال بسیار کمی ممکن است زیان، بیشتر از مقدار **VaR** شود.

سنجه‌های ریسک منسجم

آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹)

تابع مثبت و حقیقی مقدار ϱ را یک سنجه ریسک منسجم گویند، هرگاه

- زیر جمع‌پذیر باشد یعنی $\varrho(L_1 + L_2) \leq \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$.
- مکان پایا باشد یعنی $a \in \mathbb{R}$، $\varrho(L + a) = \varrho(L) - a$.
- مقیاس پایا باشد یعنی برای هر $a > 0$، $\varrho(aL) = a\varrho(L)$.
- یکنوا باشد یعنی اگر $L_1 < L_2$ آنگاه $\varrho(L_1) < \varrho(L_2)$.

سنجه‌های ریسک دیگر

- واریانس

- گشتاورهای جزئی بالایی و پایینی

- امیدریاضی شرطی دمی

$$TCE_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)).$$

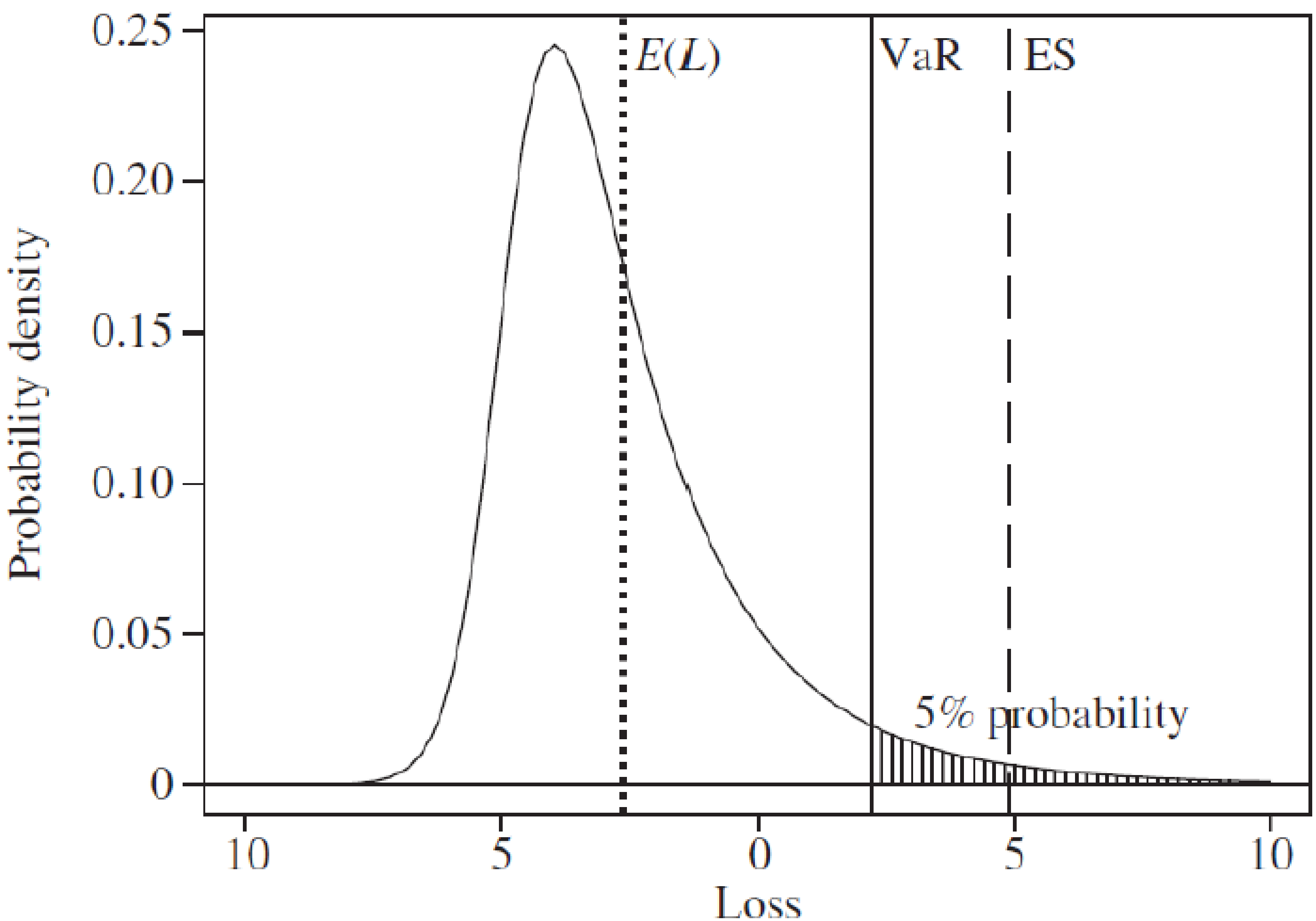
- ارزش در معرض ریسک دمی

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du \geq VaR_\alpha(L), \qquad u \geq 1-\alpha.$$

- ارزش در معرض ریسک شرطی

$$CVaR_\alpha(L) = E[L - VaR_\alpha(L)|L > VaR_\alpha(L)] = TCE_\alpha - VaR_\alpha(L)$$

مقایسه VaR و ES



مقایسه VaR و ES در توزیع های نرمال و t

α	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
VaR_α (normal model)	162.1	208.1	247.9	294.3	325.8
VaR_α (t model)	137.1	190.7	248.3	335.1	411.8
ES_α (normal model)	222.0	260.9	295.7	337.2	365.8
ES_α (t model)	223.4	286.3	356.7	465.8	563.5

- توزیع نرمال

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{ES_\alpha}{VaR_\alpha}=1,$$

- توزیع t استیودنت با درجه آزادی $\nu > 1$

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{ES_\alpha}{VaR_\alpha}=\frac{\nu}{\nu-1}>1.$$

روش‌های پیش‌بینی VaR

- روش‌های پارامتری
  - ریسک‌سنجی (EWMA)
  - مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی (GARCH)
  - مدل‌های نوسان تصادفی
  - نظریه مقدار فرین

- روش‌های ناپارامتری
  - شبیه‌سازی تاریخی
  - مونت کارلو
  - برآورد ناپارامتری تابع چگالی و توزیع

- روش‌های نیمه‌پارامتری
  - شبیه‌سازی تاریخی موزون
  - شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده (FHS)
  - نظریه مقدار فرین مبتنی بر برآوردگر هیل

روش‌های پارامتری

مدل ریسک‌سنجی

❖ مدل ریسک‌سنجی EWMA

اگر r_t بازده دارایی و σ_t^2 واریانس بازده باشد، آنگاه

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t,\ \ \epsilon_t \sim iid\ N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$$

$$t = 0, 1, \dots, T$$

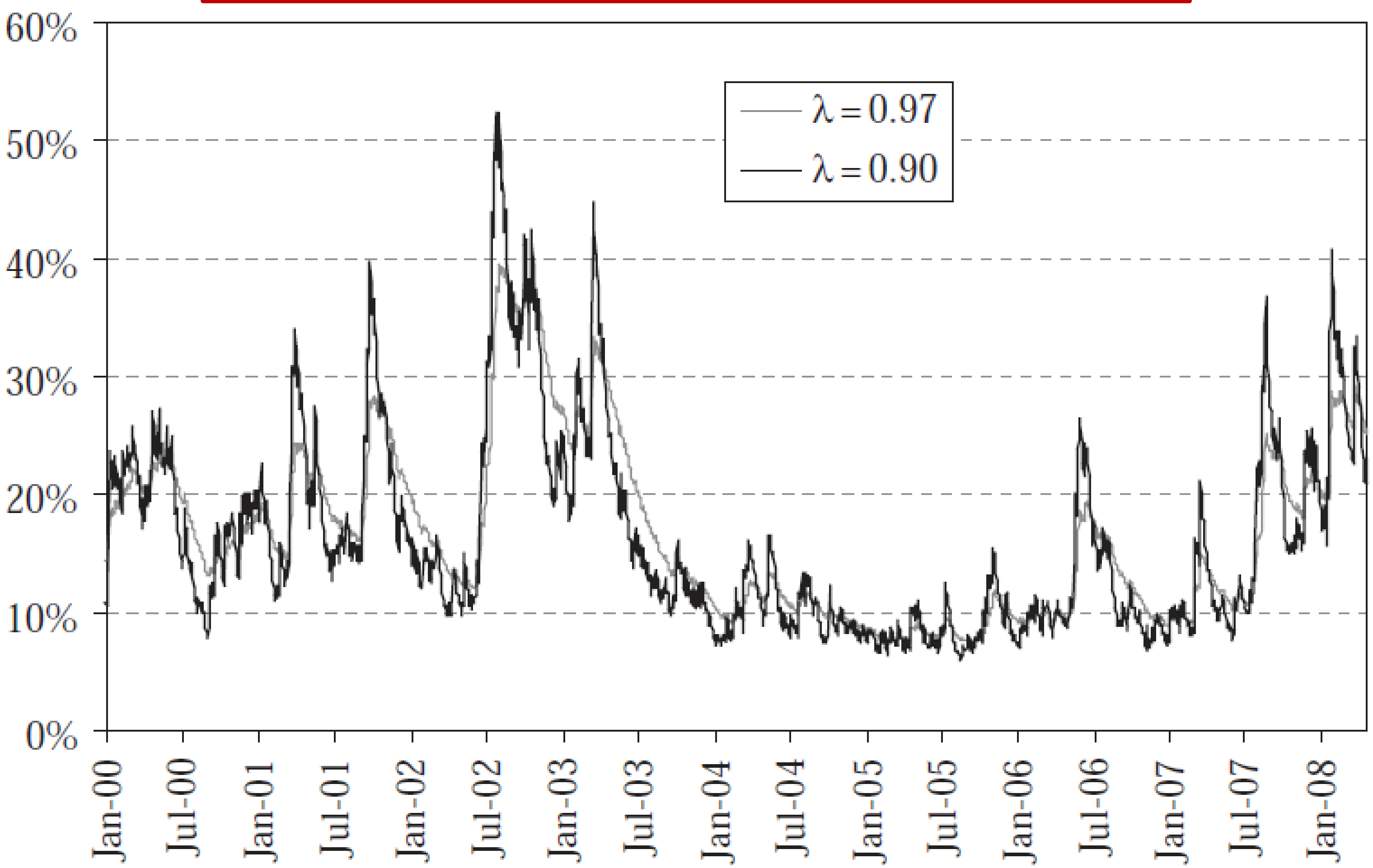
- $\sigma_1^2 = 0$
- λ ضریب فروپاشی است که برای داده‌های روزانه معمولا مقدار ۰/۹۴ و برای داده‌های ماهانه مقدار ۰/۹۷ را دارد.
- رابطه بازگشتی واریانس را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{i=-\infty}^{t-1} \lambda^{t-i-1}\ r_i^2$$

$$\boxed{\mathrm{VAR}_{h,\alpha,t} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\hat{\sigma}_t \sqrt{h}.}$$

مدل ریسک‌سنجی

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)(r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \lambda^3 r_{t-4}^2 + \ldots).$$



مدل ریسک‌سنجی

تعداد مشاهدات =۵۸۰

$$\boldsymbol{h = 10}$$

Significance level	Lambda			
	0.9	0.95	0.99	1
5%	7.42%	8.08%	7.81%	5.71%
1%	10.49%	11.43%	11.05%	8.07%
0.1%	13.93%	15.19%	14.86%	10.73%

مدل ریسک‌سنجی

❖ مدل ریسک‌سنجی با فرض اینکه توزیع بازده‌ها نرمال آمیخته باشد

اگر $\epsilon_{1,t} \sim N(\mu_{1,t}, \sigma^2_{1,t})$ و $\epsilon_{2,t} \sim N(\mu_{2,t}, \sigma^2_{2,t})$ و $\delta_t \sim Binomial(p)$

$$r_t = (1-\delta_t)\sigma_{1,t}\epsilon_{1,t} + \delta_t\sigma_{2,t}\epsilon_{2,t}$$

$$\mu_t = (1-\delta_t)\mu_{1,t} + \delta_t\mu_{2,t}$$

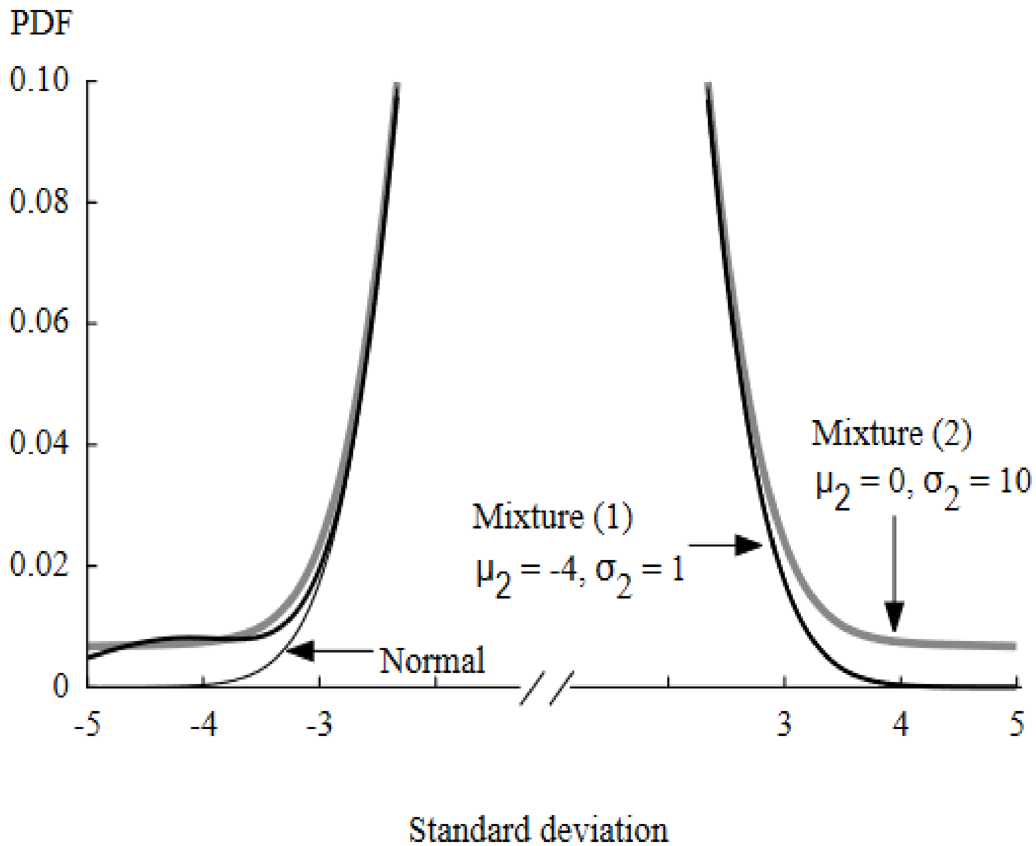
$$\sigma^2_t = (1-\delta_t)^2\sigma^2_{1,t} + \delta^2_t\sigma^2_{2,t} + 2\delta_t(1-\delta_t)\sigma_{12,t}$$

$$r_{1t} = (1-\delta_t)\sigma_{1,t}\epsilon_{1,t}, \qquad r_{2t} = \delta_t\sigma_{2,t}\epsilon_{2,t}$$

$$\sigma_{12,t} = (1-\lambda)r_{1,t-1}r_{2,t-1} + \lambda\sigma_{12,t-1}, \qquad t = 2, 3, \dots, T$$

مدل ریسک‌سنجی

- مدل اول ($Mixture$ (1)): $\mu_{2,t} = -4, \sigma_{2,t} = 1, p = 2\%, \mu_{1,t} = 0, \sigma_{1,t} = 1$
- مدل دوم ($Mixture$ (2)): $\mu_{2,t} = 0, \sigma_{2,t} = 10, p = 2\%, \mu_{1,t} = 0, \sigma_{1,t} = 1$



مدل ریسک‌سنجی

❖ مدل ریسک‌سنجی با فرض اینکه توزیع بازده‌ها نمایی تعمیم‌یافته باشد

$$r_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$$

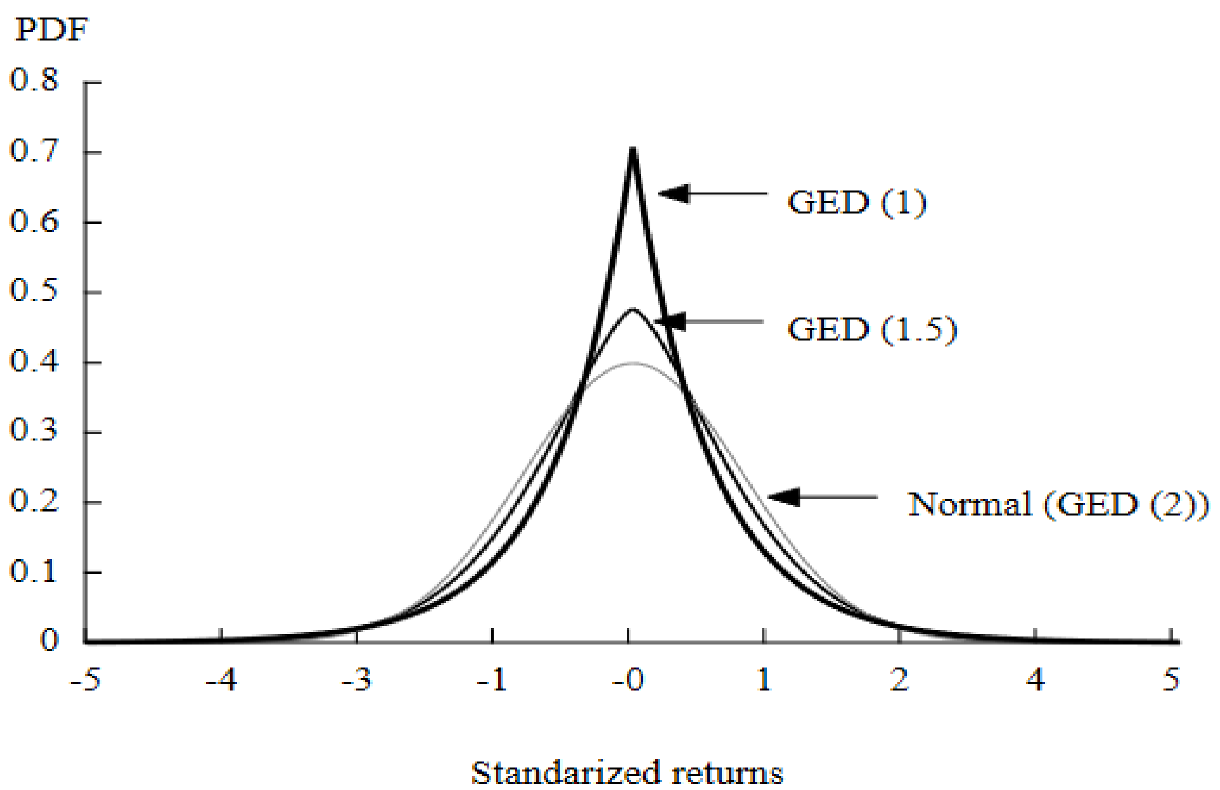
$$t = 0, 1, \dots, T$$

$$f(\epsilon_t) = \frac{v \, exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{\epsilon_t}{\lambda}\right|^v\right)}{\lambda 2^{(1+v^{-1})} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}$$

$$\lambda = \left(\frac{2^{-\left(\frac{2}{v}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{v}\right)}{\left(\frac{3}{v}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

مدل ریسک‌سنجی

❖ مدل ریسک‌سنجی با فرض اینکه توزیع بازده‌ها نمایی تعمیم‌یافته باشد



مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک (ARMA)

❖ مدل ARMA(p,q)

$$r_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, r_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} \,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}.$$

$$\epsilon_t \sim iid\, N\left(0, \sigma^2\right)$$

$$VaR_{t,\alpha} = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$\hat{\sigma}^2 = s_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r}_T)^2$$

مدل‌های ناهمواریانس شرطی تعمیم‌یافته (GARCH)

❖ مدل متقارن GARCH(p,q)

$$\mu_t = E(r_t | F_{t-1}), \qquad \sigma_t^2 = \mathrm{Var}(r_t | F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}],$$

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad z_t \sim iid\ N(0,1)$$

مدل‌های ناهمواریانس شرطی تعمیم‌یافته (GARCH)

❖ مدل متقارن GARCH(1,1)

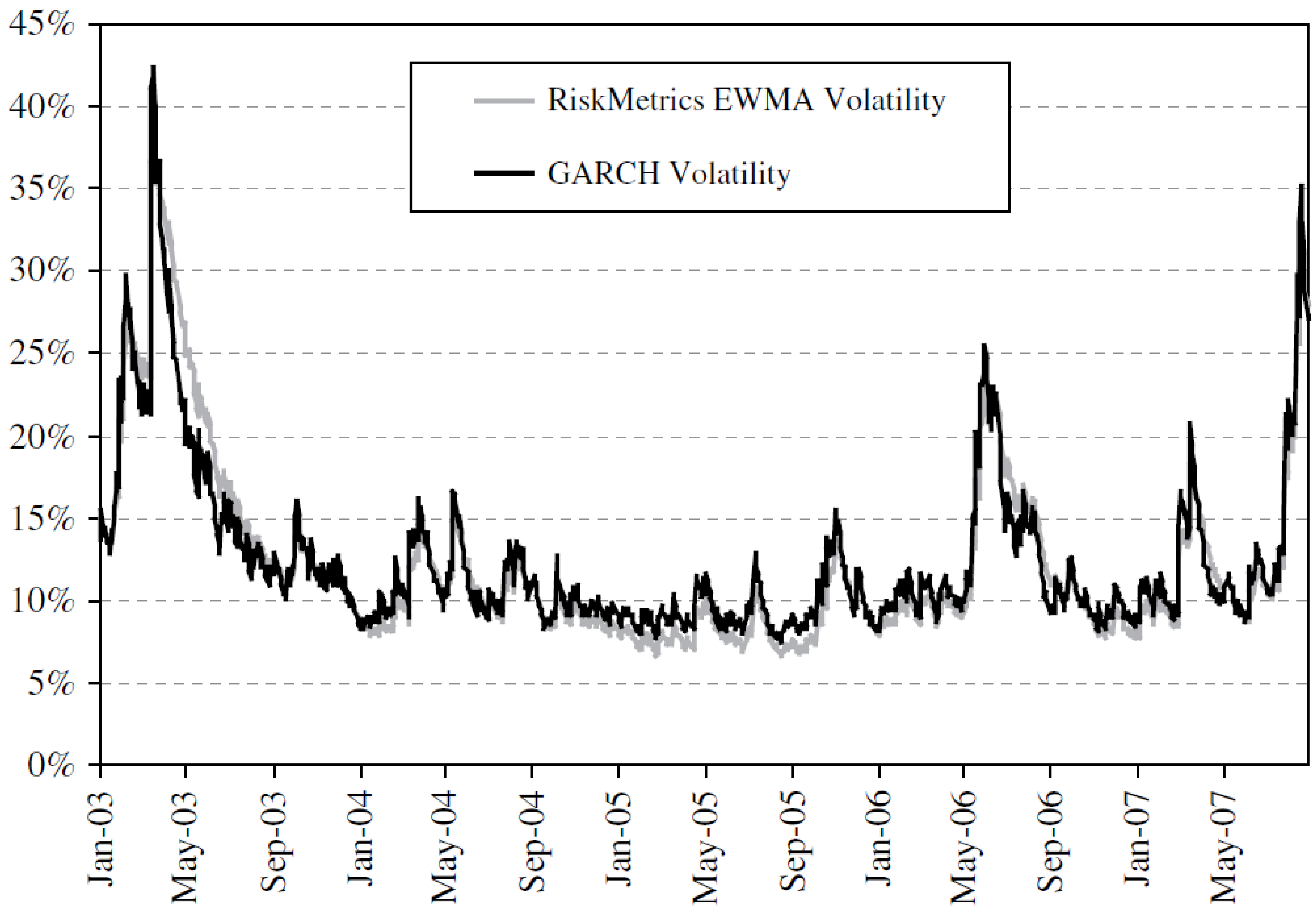
$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{E}(r_{t+1}^2|\mathcal{F}_t) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 r_t^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_t^2, \qquad t = 1, 2, \dots, T,$$

2003–2007	Excel	EViews		Matlab	
	Estimate	Estimate	t ratio	Estimate	t ratio
ω	1.531E-06	1.63E-06	2.97287	1.63E-06	2.93389
α	0.0952	0.09839	6.18307	0.10052	6.28054
β	0.8824	0.87780	42.49683	0.87624	42.14921
Long term volatility	13.08%	13.08%		13.24%	
Log likelihood	5178.21	5178.26		5178.26	

$$\bar{\sigma}^2 = Var(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)}$$

مدل‌های ناهمواریانس شرطی تعمیم‌یافته (GARCH)

❖ مدل متقارن GARCH(1,1)



مدل‌های ناهمواریانس شرطی تعمیم‌یافته (GARCH)

❖ مدل نامتقارن AGARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1(r_{t-1} - \lambda)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2,$$

$$\varepsilon_t | F_{t-1} \sim N\left(0, \sigma_{t-1}^2\right),$$

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1\left(r_T - \hat{\lambda}\right)^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_T^2$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha_0 + \lambda^2\alpha_1}{1 - (\alpha_1 + \beta)}$$

مدل‌های ناهمواریانس شرطی تعمیم‌یافته (GARCH)

❖ مدل ARMA-GARCH(p,q)

$$\mu_t = \mu + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_j (r_{t-j} - \mu_{t-j}),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i (r_{t-i} - \mu_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \sigma_{t-j}^2 ,$$

$$r_t = \mu_t + \sigma_t Z_t,$$

$$z_t \sim N(0,1),$$

$$\boldsymbol{VaR_{t,\alpha} = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \Phi^{-1}(1-\alpha)}$$

مدل‌های نوسان تصادفی (SV)

اگر α_0 و α_1 اعدادی ثابت باشند

$$r_t = \sigma_t Z_t; \quad Z_t \sim iid\, N(0,1),$$
$$ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \, ln(\sigma_{t-1}^2) + \epsilon_t,$$
$$\epsilon_t \sim iid\, N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$E\left(ln(\sigma_t^2)\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, \qquad Var\left(ln(\sigma_t^2)\right) = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\alpha_1^2}.$$

نظریه مقدار فرین (EVT)

❖ فرض کنید f تابع چگالی متغیر زیان-سود و $L_1, \dots, L_n$ نمونه تـــصادفـــی مستـقـــل و هم‌توزیـــــع به حجـــم n از این جـــامعـه باشـد.

$$M_n = \max(L_1, \dots, L_n)$$

$$H_n(x) = P(M_n \leq x) = [F_L(x)]^n$$

❖ توزیع مقدار فرین تعمیم‌یافته

$$H_\xi(x) = \begin{cases} exp\left(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0, \\ exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases}$$

نظریه مقدار فرین (EVT)

❖ روش حداکثر بلوک

- داده‌های اولیه: مشاهدات زیان–سود با توزیع نامعلوم F_L
- گام اول: تقسیم داده‌ها به m بلوک به اندازه n مشاهده
- گام دوم: محاسبه ماکسیمم داده‌ها در هر بلوک (M_{nj})
- داده‌های جدید: $M_{n1}, \dots, M_{nm}$

❖ مقدار زیاد n منجر به تقریب دقیق‌تر توزیع حداکثر بلوک و اریبی کم در برآورد پارامترها می‌شود.

❖ مقدار زیاد m داده‌های حداکثر بلوک بیشتری را برای برآورد ایجاد می‌کند و منجر به واریانس کم در برآورد پارامترها می‌شود.

$$F_L(x) = \left\{exp\left(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$VaR_\alpha(L) = \frac{1}{\xi}\left[\left(-n ln(1-\alpha)\right)^{-\xi} - 1\right]$$

نظریه مقدار فرین (EVT)

❖ روش فراتر از آستانه

- داده‌های اولیه: مشاهدات زیان-سود با توزیع نامعلوم F_L
- گام اول: انتخاب آستانه
- گام دوم: تعیین متغیر تصادفی تعداد مشاهداتی که فراتر از آستانه u هستند (N_u).
- داده‌های جدید: $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{N_u}$
- گام سوم: محاسبه زیان مازاد داده‌ها $(Y_j = \tilde{L}_j - u, j = 1,2, \dots, N_u)$

❖ توزیع فراتر از آستانه u

$$F_u(x) = P(L - u \le x | L > u) = \frac{F_L(x+u) - F_L(u)}{1 - F_L(u)}$$

❖ توزیع پارتوی تعمیم‌یافته (GPD)

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

نظریه مقدار فرین (EVT)

❖ روش فراتر از آستانه

اگر تابع توزیع زیان فراتر از آستانه F_u، برابر GPD باشد. به ازای $x \geq u$ داریم

$$\begin{aligned}\bar{F}_L(x) &= P(L > u)P(L > x|L > u) \\ &= \bar{F}(u)P(L - u > x - u|L > u) \\ &= \bar{F}_L(u)\bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}_L(u)\left(1 + \frac{\xi(x - u)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(1 - \alpha) = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)}\right)^{-\xi} - 1\right)}$$

روش‌های ناپارامتری

روش چندک نمونه‌ای غیرشرطی

❖ مدل ARMA-GARCH(p,q)

فرض کنید $L_1, \dots, L_n$ دنباله‌ای از متغیرهای زیان–سود با توزیع F_L باشد

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(L_i \le x)$$

$$VaR_\alpha(L) = inf\left(l,\ \widehat{F}_n(l) \ge 1-\alpha\right)$$

برآوردگرهای کرنل

فرض کنید که T یک تبدیل محدب باشد به طوریکه $Y_i = T(L_i), i = 1,2, \dots, n$ مشاهدات زیان-سود تبدیل شده باشند.

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{T(l)-T(L_i)}{h_n}\right)$$

$$VaR_\alpha(L) = inf\left(l,\ \hat{F}_L(l) \geq 1-\alpha\right)$$

روش‌های نیمه‌پارامتری

روش‌های شبیه‌سازی تاریخی

- گام اول: برآورد توزیع بازده بر اساس داده‌های تاریخی
- گام دوم: برای محاسبه VaR، دم این توزیع مورد توجه قرار می‌گیرد.
- حجم نمونه تأثیر بسزایی در دقت برآورد دارد.
- انتخاب حجم نمونه با فرکانس داده‌ها ارتباط دارد.
- VaR تاریخی یا بر اساس بازده‌های روزانه سبد سهام محاسبه می‌شود و یا اینکه از روش شبیه سازی چند مرحله‌ای برای برآورد آن استفاده می‌شود.
- محاسبه VaR تاریخی h روزه به صورت تابعی از VaR تاریخی روزانه

توزیع پایدار: توزیع F پایدار گفته می‌شود هرگاه توزیع مجموع N متغیر تصادفی با توزیع F، نیز F باشد.

توزیع ξ-پایدار: متغیر تصادفی X با امید ریاضی صفر، دارای توزیع ξ-پایدار است هرگاه

$$\sum_{i=1}^{h} X_i = h^{\frac{1}{\xi}} X, \qquad \xi \in (0,2].$$

در توزیع کوشی $\xi = 1$، در توزیع لوی $\xi = \frac{1}{2}$ و در توزیع نرمال $\xi = 2$ است.

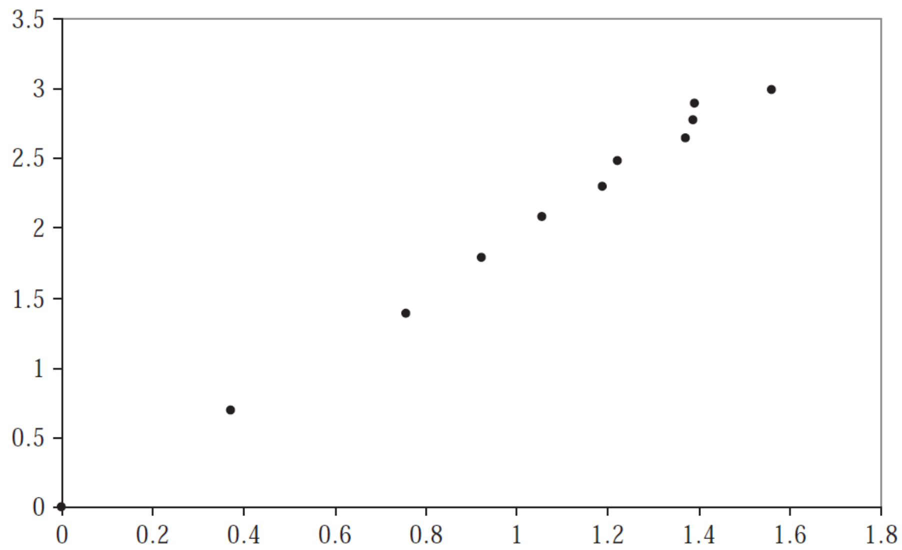
❖ محاسبه VaR تاریخی در مقیاس نمایی

- فرض کنید $x_{h,\alpha}$ چندک αام توزیع لگاریتم بازده h روزه باشد. می‌خواهیم ξ را طوری بیابیم که

$$x_{h,\alpha} = h^{\frac{1}{\xi}} x_{1,\alpha}$$

- $$\xi = \frac{\ln h}{\ln x_{h,\alpha} - \ln x_{1,\alpha}}$$

- داده‌های بازده روزانه شاخص S&P500 در یک بازه طولانی، از ۳ ژانویه ۱۹۵۰ تا ۱۰ مارچ ۲۰۰۷



  - $\alpha = 0.05$
  - $h = 2,3, \ldots ,20$
  - $\xi^{-1} = 0.50011$
  - $VaR_{h,0.05} = \sqrt{h} VaR_{1,0.05}$

روش‌های شبیه‌سازی تاریخی

برآوردهای ξ^{-1} در نمونه‌های مختلف بازده روزانه شاخص **S&P500** و مقادیر مختلف α

α	0.1%	1%	5%	10%
1950–2007	0.4662	0.5186	0.5001	0.4853
1970–2007	0.5134	0.5074	0.4937	0.4639
1990–2007	0.4015	0.4596	0.4522	0.4268

روش‌های شبیه‌سازی تاریخی

- مقیاس‌بندی VaR تاریخی در پورتفوی‌های خطی
- **اگر دارایی‌ها یا عوامل خطر دارای مقیاس‌های نمایی متفاوتی باشند، که معمولاً چنین خواهد بود، توزیع بازده سبد سهام پایدار نخواهد بود.**
  - سبد سهامی را متشکل از n دارایی با وزنهای $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$، در نظر بگیرید که در آن w_i وزن نظیر دارایی i ام است.
  - لگاریتم بازده‌های روزانه نظیر دارایی‌ها در زمان t: $\boldsymbol{x_t} = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$
  - لگاریتم بازده روزانه سبد سهام در زمان t: $Y_{1t} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{x_t}$.
  - توزیع بازده دارایی i ام پایدار با مقیاس نمایی $\lambda_i = \xi^{-1}$ است.
  - لگاریتم بازده h روزه پرتفوی عبارتست از

$$Y_{ht} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{w}'\left(h^{\frac{\lambda_1}{2}}x_{1t}, h^{\frac{\lambda_2}{2}}x_{2t}, \dots, h^{\frac{\lambda_n}{2}}x_{nt}\right)' \neq h^{\frac{\lambda}{2}}Y_{1t}$$

  - اگر $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ آنگاه

$$Y_{ht} = h^{\frac{\lambda}{2}}Y_{1t}$$

روش‌های شبیه‌سازی تاریخی

می‌توان یکی از روشهای تقریبی زیر را برای مقیاس‌گذاری VaR تاریخی، استفاده کرد:

- **اگرتوزیع بازده‌های روزانه دارایی‌ها یا عوامل خطر پایداربود، ابتدا مقیاس نمایی نظیر توزیع بازده هریک از دارایی‌ها (λ_i)را برآورد کنید. از میانگین آنها $(\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$برای مقیاس‌بندی آنها به بازده‌های h روزه استفاده کنید. سپس با استفاده از تعریف نگاشت پرتفوی Y_{ht}، پرتفوی روزانه را به پرتفوی h روزه تبدیل کنید.**

- **متناوبا ، بازده روزانه پرتفوی را محاسبه کرده و با فرض پایدار بودن توزیع آن مقدار مقیاس نمایی (λ)را برآورد کنید. سپس بازده روزانه پرتفوی را به بازده h روزه تبدیل کنید.**

برهم‌نهی داده‌ها و شبیه‌سازی تاریخی چند مرحله‌ای

در یک پرتفوی خطی، شبیه‌سازی چندمرحله‌ای عبارت است از شبیه‌سازی لگاریتم بازده h روزه از طریق جمع کردن h لگاریتم بازده روزانه متوالی و سپس ارزش‌گذاری مجدد پرتفوی.

مثال: فرض کنید ۱۰۰۰ داده مستقل و هم‌توزیع مربوط به سود-زیان (P&L) روزانه، از توزیع نرمال با میانگین صفر در اختیار باشند.

$\mathrm{VaR}_{1\%} = 10000\$$

$\mathrm{VaR}_{0.1\%} = 1000000\$$

- در اینصورت $\boldsymbol{VaR_{0.1\%}}$، صد برابر بزرگتر از $\boldsymbol{VaR_{1\%}}$ است.

$\boldsymbol{\xi = 2}$

$\mathrm{VaR}_{10,1\%} = \sqrt{10}\, VaR_{1\%}$

$\mathrm{VaR}_{10,0.1\%} = \sqrt{10}\, VaR_{0.1\%}$

- در نتیجه $\boldsymbol{VaR_{10,0.1\%}}$ صدبرابر بزرگتر از $\boldsymbol{VaR_{10,1\%}}$ می‌باشد.
- خسارتی که هر ۴۰ سال متحمل می‌شود، ۱۰۰ برابر خسارتی است که در ۴ سال اتفاق می‌افتد.

برهم‌نهی داده‌ها و شبیه‌سازی تاریخی چند مرحله‌ای

مثال (ادامه): در مثال قبل، فرض کنید داده‌ها به صورت ده روزه در اختیار باشند. بنابراین ۱۰۰ داده مستقل و هم‌توزیع مربوط به سود-زیان (P&L) روزانه، از توزیع نرمال با میانگین صفر در اختیار است.

$$\mathrm{VaR}_{10,1\%} = 1000000\$$$

- $\boldsymbol{VaR_{10,0.1\%}}$، قابل محاسبه شدن نیست.
- برهم‌نهی داده‌های ده روزه ⟸ ۱۰۰۰ مشاهده که ۱۰ تای آنها یک میلیون دلار است.

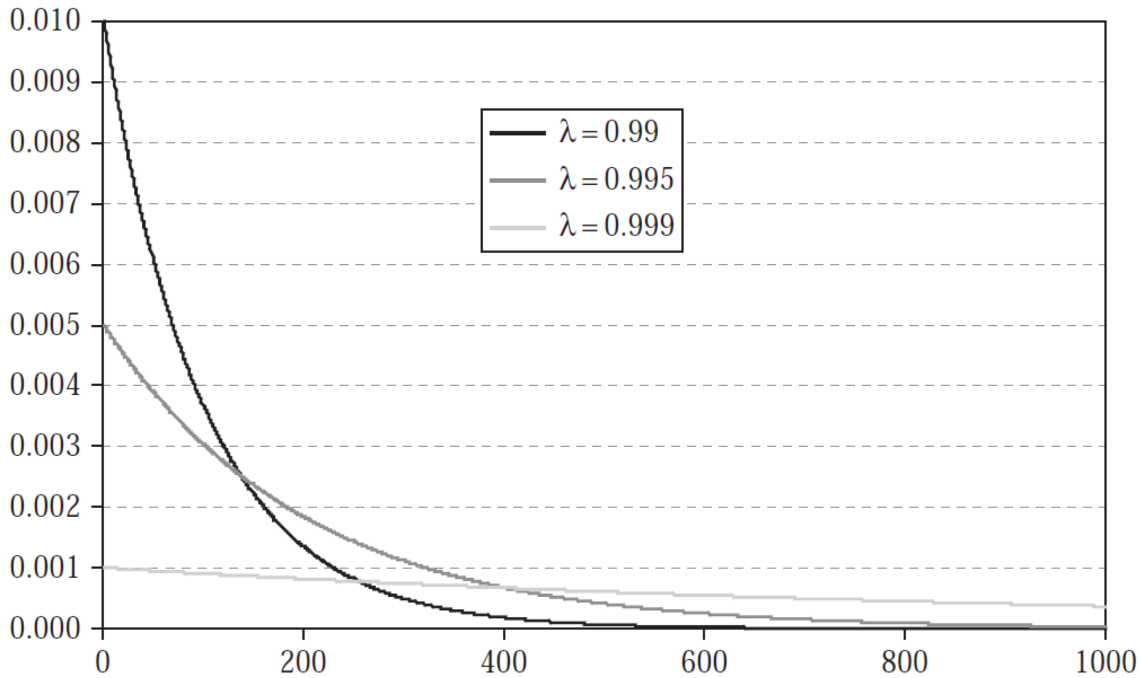
$$\mathrm{VaR}_{10,1\%} = 1000000\$$$

$$\mathrm{VaR}_{10,0.1\%} = 1000000\$$$

- ضرری که هر ۴۰ سال متحمل می‌شود به اندازه ضرری است که هر ۴ سال اتفاق می‌افتد.

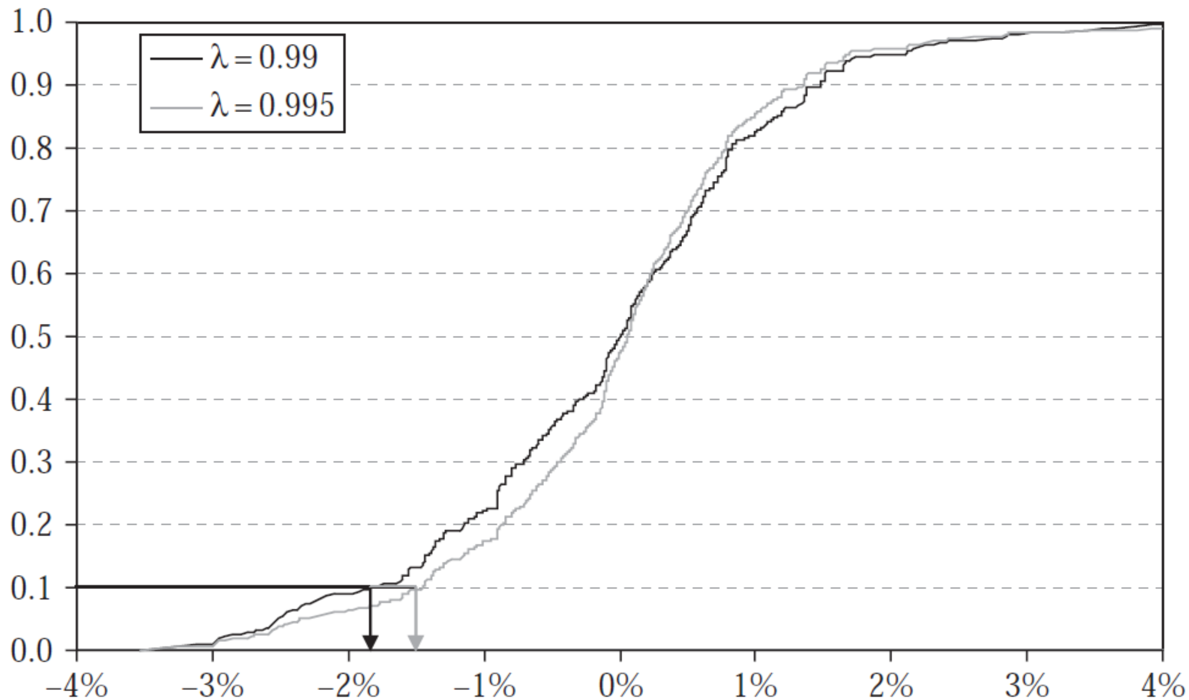
بهبود دقت VaR تاریخی

- عدد ثابت هموارساز λ را در بازه $(0,1)$ در نظر بگیرید.
- به آخرین بازده وزن $(1-\lambda)$، به بازده ماقبل آخر وزن $\lambda(1-\lambda)$، و به ترتیب به بازده‌های ماقبل آن وزن‌های $\lambda^2(1-\lambda)$، $\lambda^3(1-\lambda)$ و... نسبت داده می‌شود.
- مجموع وزنهایی که به این شکل به بازده‌ها اختصاص می‌یابد برابر یک است و به همین علت به آنها وزن‌های احتمالی گفته می‌شود.
- وزن‌ها معادل مدل ***EWMA*** هستند.



بهبود دقت VaR تاریخی

برای یک مقدار مفروض λ، کوچکترین مقدار بازده روزانه برابر -3.53% است که در تاریخ ۲۷ فوریه ۲۰۰۷ رخ داده است. وزن نمایی نظیر این بازده را ثبت کرده و با مرتب کردن بازده‌ها از کوچک به بزرگ، وزن نظیر هر کدام، با مقادیر ثبت شده قبلی جمع می‌شوند. چندک α ام بازده‌ها، مقداری است که احتمال تجمعی نظیر آن برابر α شود.



بهبود دقت VaR تاریخی

- به ازای $\lambda = 0.99$

$$VaR_{10\%} = 10\% \text{ چندک } \times -1 \cong 1.7\%$$

- به ازای $\lambda = 0.995$

$$VaR_{10\%} = 10\% \text{ چندک } \times -1 \cong 1.45\%$$

- به ازای $\lambda = 0.999$

$$VaR_{10\%} = 10\% \text{ چندک } \times -1 \cong 3\%$$

تعدیل نوسانات (VW)

فرض کنید $\{r_t, t = 1,2,\dots,T\}$ سری زمانی بازده‌های تاریخی تعدیل نشده پرتفوی باشد. سری زمانی نوسان آماری بازده‌ها را با نماد $\{\hat{\sigma}_t, t = 1,2,\dots,T\}$ نمایش داده و آخرین زمان ثبت نمونه که در آن VaR محاسبه می‌شود، در زمان T است. سپس به ازای هر $t < T$، سری بازده‌های تعدیل شده نوسان عبارتست از

$$\tilde{r}_{t,T} = \left(\frac{\hat{\sigma}_T}{\hat{\sigma}_t}\right) r_t, \qquad t = 1, 2, \dots, T$$

- اگر یک پرتفوی شامل چند دارایی باشد، می‌توان روش فوق را برای هر یک از دارایی‌ها انجام داد.

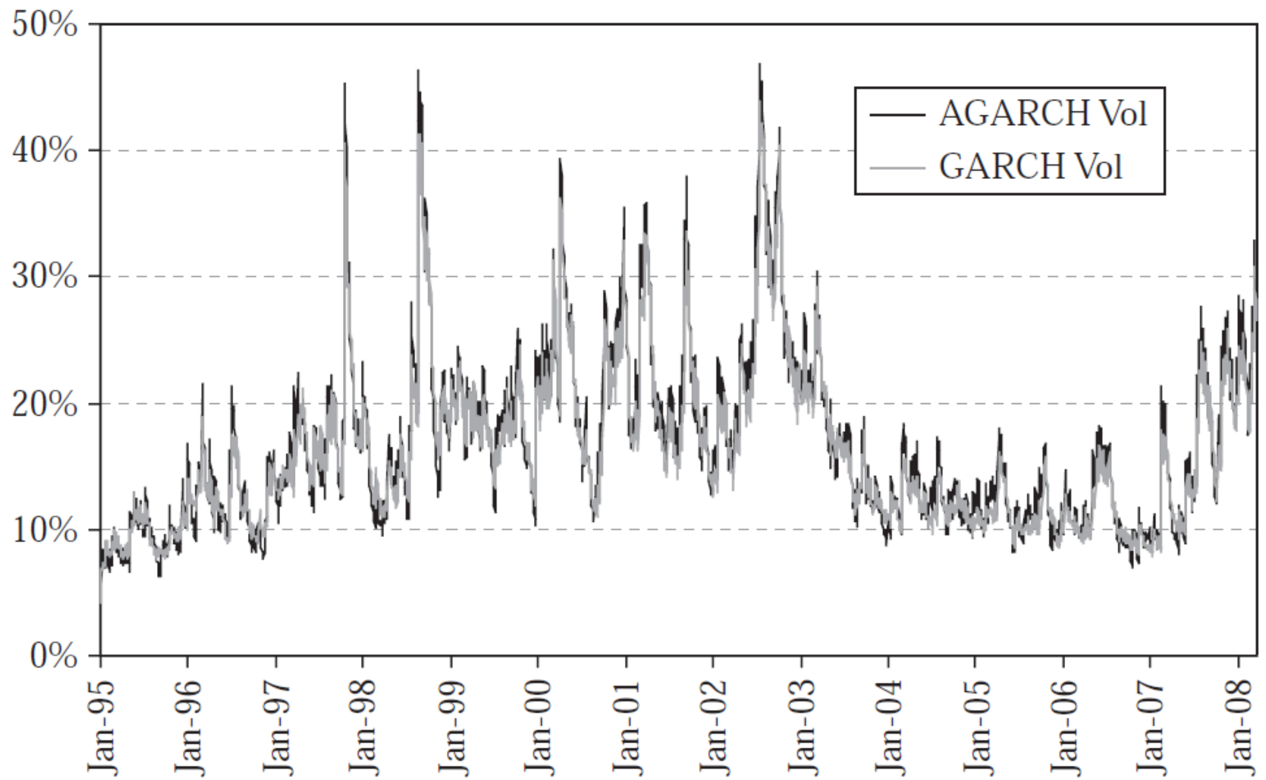
$$r^*_{t,i} = \left(\frac{\sigma_{T,i}}{\sigma_{t,i}}\right) r_{t,i}$$

تعدیل نوسانات (VW)

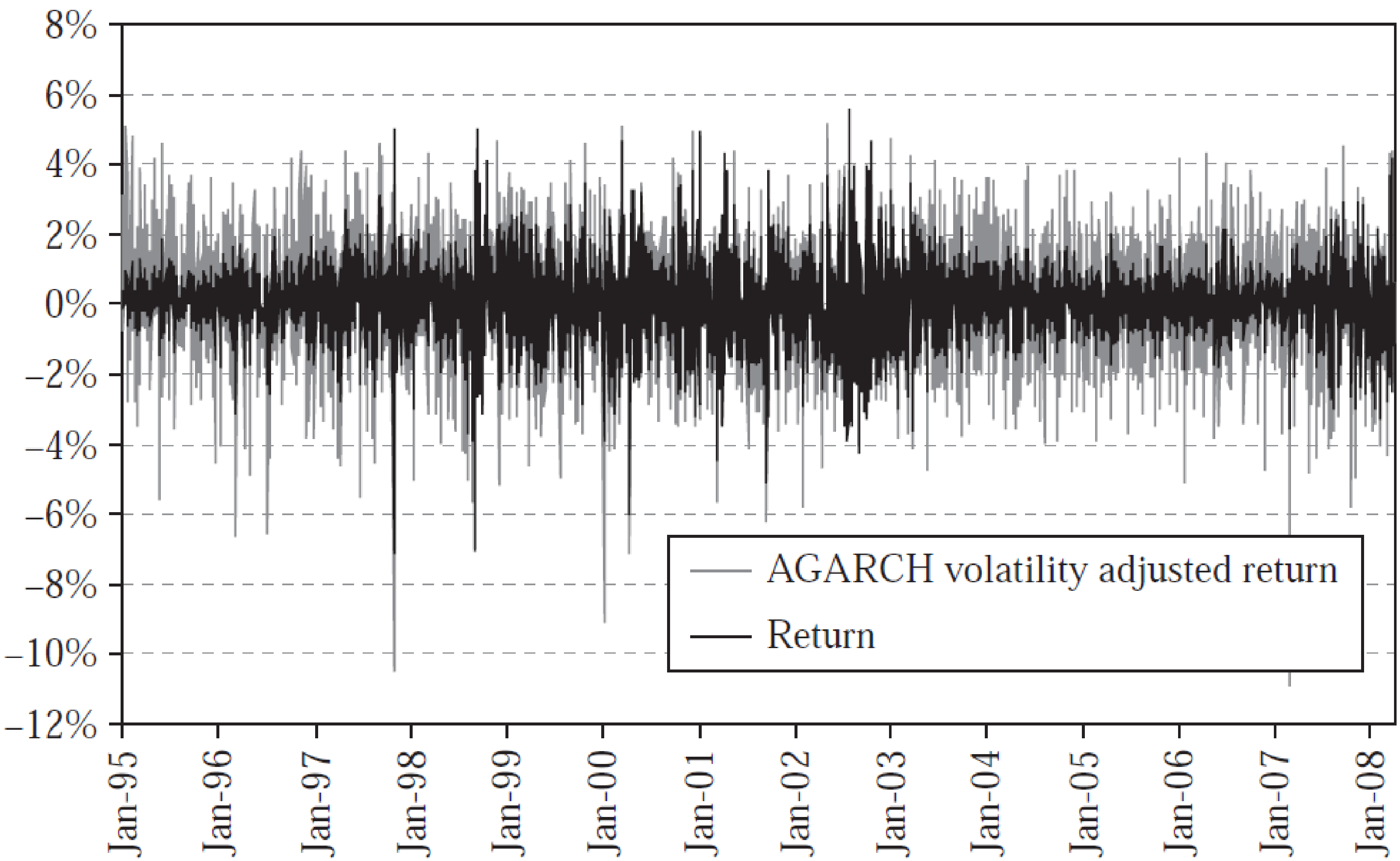
مثال: داده‌های لگاریتم بازده روزانه شاخص S&P500 را از تاریخ ۲ ژانویه ۱۹۹۵ تا ۳۱ مارچ ۲۰۰۸ برای برآورد مدل GARCH متقارن و غیر متقارن را در نظر بگیرید. زمان‌T، یعنی تاریخ محاسبه VaR، ۳۱ مارچ ۲۰۰۸ است.

پارامتر	GARCH متقارن	GARCH نامتقارن
ω	1.085473E-06	3.609464E-07
α	0.0791	0.0979
β	0.9143	0.8988
λ	-	0.0038
$\alpha+\beta$	0.9934	0.9967
نوسانات بلند مدت	20.27%	36.47%
لگاریتم درستنمایی	13848.27	13887.96

تعدیل نوسانات (VW)



تعدیل نوسانات (VW)



مقایسه روش موزون و نوسانات تعدیل شده با مدل GARCH

سطح معنی داری	بازده‌های تعدیل نشده	بازده‌های تعدیل شده نوسان	
		GARCH متقارن	GARCH نامتقارن
0.1%	4.84%	7.50%	7.04%
1%	2.83%	4.18%	4.28%
5%	1.78%	2.69%	2.79%
10%	1.27%	2.11%	2.11%

- پارامترهای مدل GARCH بطور بهینه و با استفاده از داده‌ها برآورد می‌شوند، در صورتی‌که در روش وزن‌دهی نمایی مقدار ثابت هموارساز نمایی λ به صورت سلیقه‌ای و با توجه به تجربه تحلیل‌گر انتخاب می‌شود.
- استفاده از نمونه بسیار بزرگی از مشاهدات برای برآورد توزیع تجربی بازده‌ها دقت برآورد را بیشتر می‌کند، در صورتی‌که در روش وزن‌دهی نمایی هرچه تعداد نمونه‌ها بیشتر شود، محاسبه یک برآورد دقیق دشوارتر می‌شود.

شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده (FHS)

- فرض کنید یک مدل *GARCH* متقارن بر روی لگاریتم بازده‌های تاریخی r_t به صورت زیر برآورد شود:

$$z_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t}$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_t^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_t^2$$

- مقدار $\hat{\sigma}_1$ را برابر برآورد انحراف استاندارد مدل *GARCH* روزانه در آخرین روز نمونه تاریخی، یعنی تاریخی که در آن *VaR* محاسبه می‌شود، قرار می‌دهیم.
- مقدار r_1 برابر لگاریتم بازده پرتفوی بین روز محاسبه *VaR* و روز ماقبل آن است.
- واریانس مدل *GARCH* روزانه در روز اول افق زمانی (پیش بینی یک گام به جلو واریانس مدل):

$$\hat{r}_1 = z_1^* \hat{\sigma}_2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_1^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_1^2$$

- تولید داده‌ها برای تمام روزهای افق زمانی:

$$t = 1, 2, \dots, h \qquad \hat{r}_t = z_t^* \hat{\sigma}_{t+1}, \qquad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2,$$

- لگاریتم بازده برآورد شده در افق زمانی h روز:

$$\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \cdots + \hat{r}_h$$

شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده (FHS)

مثال: داده‌های لگاریتم بازده روزانه شاخص S&P500 را از تاریخ ۲ ژانویه ۱۹۹۵ تا ۳۱ مارچ ۲۰۰۸ برای مدل GARCH نامتقارن و افق زمانی ۱۰ روزه را در نظر بگیرید.

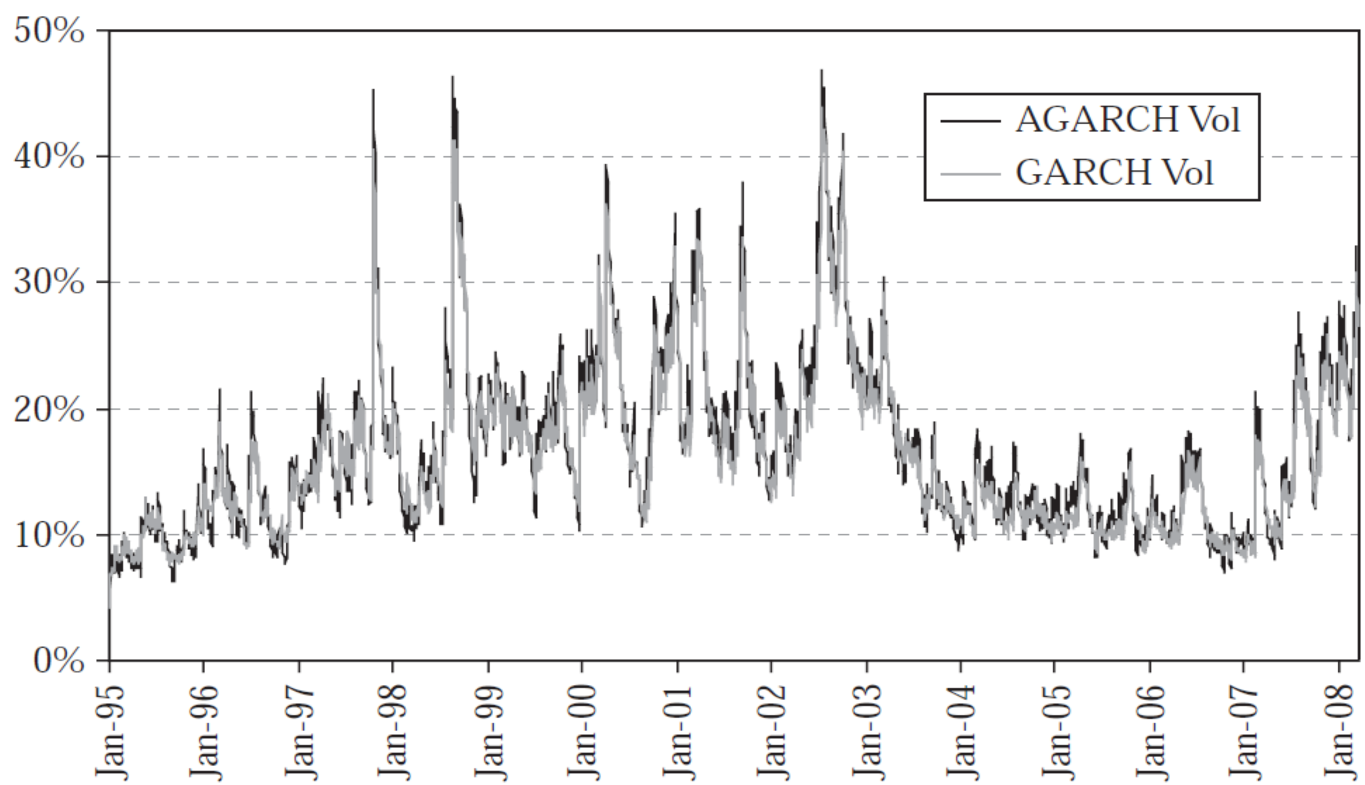
$\hat{r}_0 = 0.57\%$

نوسان سالانه مدل GARCH نامتقارن= ٪۲۷.۸

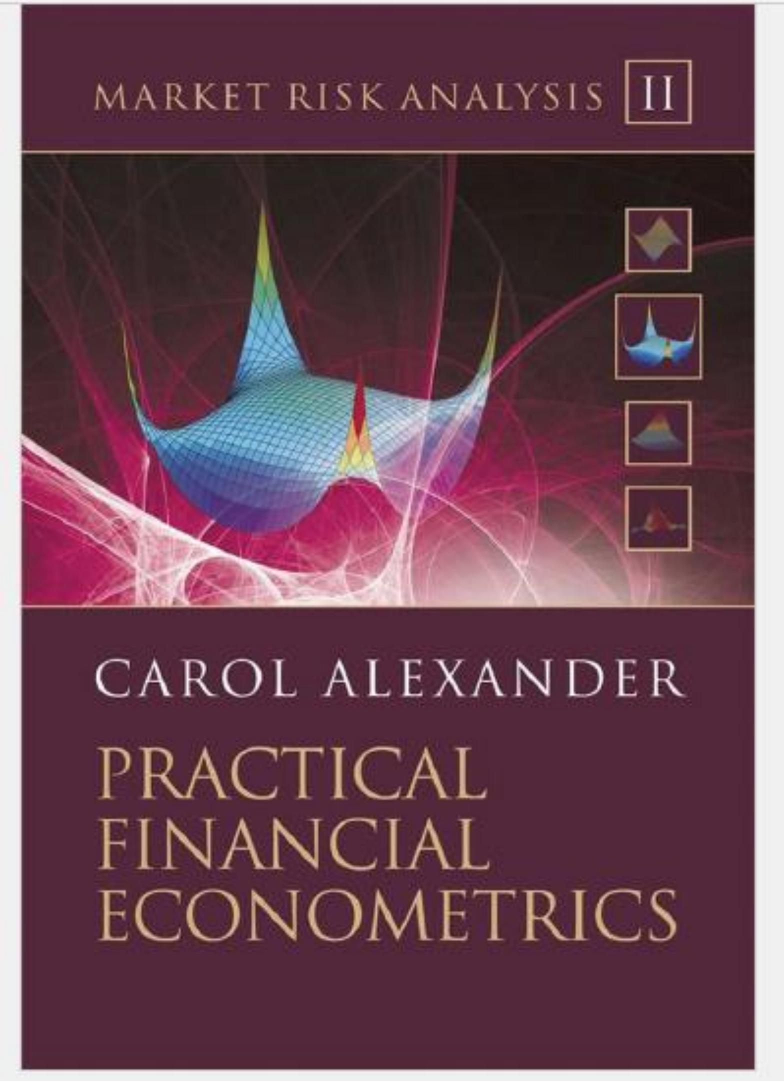
چندک		نوسان فعلی 27.82%		نوسان 10%	
		FHS	VaR تعدیل‌شده مقیاس‌بندی	FHS	VaR تعدیل‌شده مقیاس‌بندی
0.1%		21.13%	22.25%	9.09%	8.00%
1%		12.79%	13.53%	5.44%	4.86%
5%		7.96%	8.84%	3.18%	3.18%
10%		5.70%	6.67%	2.29%	2.40%

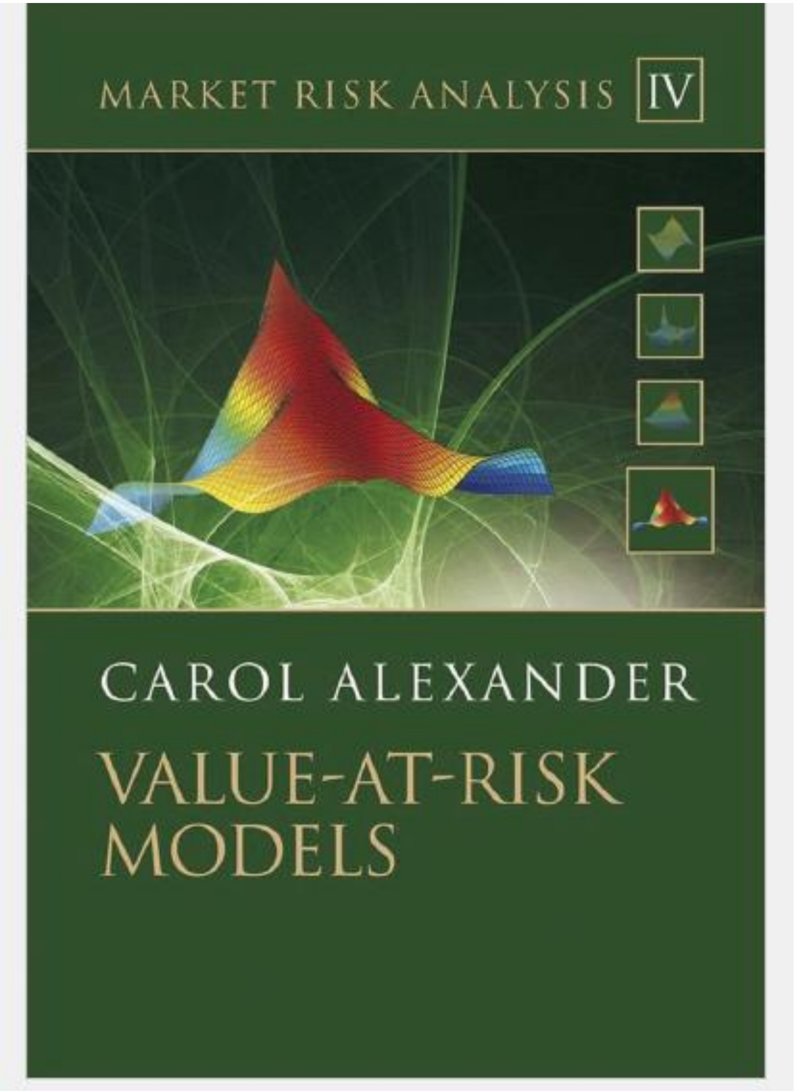
شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده (FHS)

- متوسط نوسان برآورد شده از مدل **AGARCH**=۱۶.۷٪
- شرط $\xi = 2$ فقط برای حالتی که بازده‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند، معتبر است و در چارچوب **FHS** برقرار نیست.



منابع پیشنهادی برای مطالعه





با سپاس از شما